

# Détection et localisation de défauts simultanés de capteurs par estimation

Vincent SIRCOULOMB, Ghaleb HOBLOS, Houcine CHAFOUK

Institut de Recherche en Systèmes Électroniques Embarqués (IRSEEM)  
Technopôle du Madrillet, avenue Galilée, BP 10024, 76801 Saint-Étienne-du-Rouvray, France  
{vincent.sircoulomb,ghaleb.hoblos,houcine.chafouk}@esigelec.fr

**Résumé** – Cet article propose une méthode permettant de détecter et localiser des défauts de capteurs sur un système linéaire à temps variant. Cette méthode consiste à estimer l’amplitude des défauts (additifs) à partir d’un module de moindres carrés couplé au filtre de Kalman estimant l’état du système. L’approche proposée permet de considérer des défauts multiples et d’occurrence simultanée.

**Abstract** – This paper deals with a method for detecting and isolating sensors faults on a linear time-varying system. This method consists in estimating the (additive) faults magnitude thanks to a least square module coupled to the Kalman filter estimating the system state. The proposed approach allows to consider multiple and simultaneous faults.

## 1 Introduction

La tendance actuelle d’économie d’énergie et de respect de l’environnement pousse à une optimisation de la plupart des processus industriels. Cela engendre naturellement une complexification notable de ces systèmes, ce qui accroît par conséquent le risque de dysfonctionnements. De ce fait, la surveillance des systèmes industriels est un domaine actuellement en plein essor. Une tâche particulièrement importante dans l’activité de surveillance est la détection et localisation de défauts, qui consiste à déterminer s’il y a ou non la présence de défaut(s) et si oui, déterminer l’origine de ou des anomalies (défaillance de capteurs ou d’actionneurs, dysfonctionnement du système). Parmi les méthodes de détection et localisation de défaut (que nous appellerons désormais FDI pour Fault Detection and Isolation), celles à base de modèle sont particulièrement utilisées. On y distingue les méthodes de l’espace de parité, celles à base d’estimation d’état et celles à base d’estimation paramétrique [1, 2, 3, 4]. Dans ce travail, nous nous intéressons à la détection de défauts de capteurs. Les techniques les plus indiquées pour traiter un tel problème sont celles de l’espace de parité ou à base d’estimation d’état. Toutefois, ces méthodes sont parfois lourdes à mettre en œuvre et ne permettent pas toujours de détecter et localiser des défauts multiples. Nous proposons une approche alternative qui consiste à estimer l’amplitude (potentiellement variable) des défauts associés à chaque mesure. Dans cet article, la section 2 expose tout d’abord le problème considéré. Ensuite, la section suivante contient les développements mathématiques liés à l’approche proposée. Cette dernière est appliquée sur un exemple simple dans la section 4. Enfin, les perspectives de ce travail, notamment son extension au cas non linéaire, sont discutées dans la conclusion.

## 2 Position du problème

Considérons le système linéaire à temps variant suivant :

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{F}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k, \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k, \quad (2)$$

où  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$  est le vecteur d’état,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$  le vecteur de commande,  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$  le vecteur de mesure,  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n_x}$  le bruit de dynamique,  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_y}$  le bruit de mesure et  $k \in \mathbb{N}$  le temps (discret). Les matrices  $\mathbf{F}_k$ ,  $\mathbf{G}_k$  et  $\mathbf{H}_k$  sont de dimension appropriée et supposées connues à chaque instant  $k$ . L’état initial  $\mathbf{x}_0$  ainsi que les bruits  $\mathbf{w}_k$  et  $\mathbf{v}_k$  ont pour covariance respective  $\mathbf{P}_0$ ,  $\mathbf{Q}_k$  and  $\mathbf{R}_k$ . De plus, les séquences,  $\{\mathbf{w}_k\}$  et  $\{\mathbf{v}_k\}$  sont supposées blanches, centrées, mutuellement décorrélées et décorrélées avec  $\mathbf{x}_0$ . Le système décrit par les équations (1) et (2) est supposé commandable et observable pour n’importe quel instant  $k$ .

Nous cherchons à détecter et localiser des défauts de capteur se manifestant par une erreur additive affectant le vecteur de mesures  $\mathbf{y}$ . Ces défauts peuvent *a priori* être d’amplitude variable dans le temps (comme une dérive par exemple), multiples, voire même simultanés. Parmi les approches existantes, il y a tout d’abord l’espace de parité [3, chap. 1], dont l’inconvénient est d’être lourd à mettre en œuvre dans le cas dynamique, notamment lorsque les coefficients des matrices  $\mathbf{F}_k$ ,  $\mathbf{G}_k$  et  $\mathbf{H}_k$  varient avec le temps. Les techniques à base de bancs d’observateurs ou de filtres de Kalman ne sont en revanche pas affectés par ce genre de difficulté, puisque les filtres de Kalman sont justement dédiés aux systèmes linéaires à temps variant du type (1)-(2). Parmi les architectures existantes, il y a tout d’abord le GOS (Generalized Observer Scheme) [3, chap. 2], qui consiste à faire fonctionner en parallèle  $n_y$  filtres de Kalman indépendants. Le  $i^{\text{ème}}$  filtre de Kalman se sert de l’intégralité des composantes du vecteur de mesures  $\mathbf{y}_k$  à l’exception de la  $i^{\text{ème}}$ , notée  $y_{i,k}$ . Ainsi, si un défaut apparaît sur le capteur mesurant  $y_{i,k}$ , alors l’estimée du  $i^{\text{ème}}$  filtre de Kalman n’en sera pas affectée, ce qui n’est pas le cas des estimées des

autres filtres. En mettant en œuvre un test adéquat, il est alors aisé de trouver l'origine du défaut. L'inconvénient majeur du GOS est qu'il ne peut détecter et localiser qu'un seul défaut à la fois. Pour améliorer cela, des extensions ont été proposées, comme par exemple la synthèse d'un banc de filtres reconfigurable [5] permettant de détecter deux défauts à la fois, sous réserve que leur instant d'occurrence ne soit pas identique. Pour détecter et localiser plusieurs défauts éventuellement simultanés, l'architecture DOS (Dedicated Observer Scheme) semble plus indiquée. Son principe est également de faire fonctionner en parallèle  $n_y$  filtres de Kalman indépendants. Toutefois, à la différence du GOS, le  $i^{\text{ème}}$  filtre de Kalman utilise une seule mesure qui est  $y_{k,i}$ . Ainsi, en cas de défaut sur le capteur mesurant cette grandeur, seul le  $i^{\text{ème}}$  filtre de Kalman sera affecté, ce qui rend là encore aisée l'opération de détection et de localisation de défaut, même en cas de défauts multiples. Si la potentialité du schéma DOS est énorme, cette configuration est malheureusement soumise à une restriction majeure : pour être applicable, l'état  $x$  doit être observable à partir d'un unique  $y_{k,i}$ , et ce quel que soit  $i \in \{1, \dots, n_y\}$ . Ceci est rarement le cas. Cela nous a incité à proposer une nouvelle approche, qui consiste à utiliser un seul filtre de Kalman et d'y adjoindre un module estimant les défauts additifs associé à chacun des  $n_y$  capteurs. Cette approche est évoquée plus en détails dans la section suivante.

### 3 Méthode d'estimation de défauts de capteurs

Dans cette section, nous proposons une méthode d'estimation de défauts additifs entachant des mesures. L'approche est très largement inspirée de la technique d'estimation d'entrée proposée par Chan *et al.* [6] puis développée sous forme récursive par Wang et Varshney [7], ces travaux étant eux-même très proches de ceux menés par Willsky [8, 9]. A noter qu'il existe dans la littérature d'autres travaux sur l'estimation de défauts [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]. Considérons l'équation d'état (1), à laquelle on adjoint l'équation de mesure suivante :

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{e}, \quad (3)$$

qui n'est autre que la relation (2) à laquelle on a ajouté le terme  $\mathbf{D}_k \mathbf{e}$  qui a pour vocation de modéliser les défauts entachant les mesures  $\mathbf{y}_k$ . Dans cette relation :

- le vecteur  $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^{n_e}$  (avec  $n_e \leq n_y$ ) représente les amplitudes des défauts, lesquelles sont pour l'instant supposées constantes,
- la matrice  $\mathbf{D}_k$  de direction des défauts est connue et peut varier avec le temps.

Nous allons chercher à estimer  $\mathbf{e}$  en plus des états  $\{\mathbf{x}_k\}$ . Considérons à titre d'exemple que l'on sache que sur les  $n_y$  mesures, seules la première et la troisième peuvent être affectées par des défauts de capteur. Nous sommes alors intéressés à estimer les deux biais correspondant à ces défauts, ce qui implique que le vecteur  $\mathbf{e}$  ne présentera que  $n_e = 2$  composantes

et que par conséquent, la matrice  $\mathbf{D}_k$  aura l'allure suivante :

$$\mathbf{D}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}. \quad (4)$$

#### 3.1 Développement de la méthode

Afin de dériver les équations à la base de la méthode proposée, admettons dans un premier temps que le vecteur constant  $\mathbf{e}$  soit connu. Les équations sous forme prédictor d'un filtre de Kalman estimant l'état du système (1)-(3) sont les suivantes [17] :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} + \mathbf{F}_k \mathbf{K}_k \tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1} + \mathbf{G}_k \mathbf{u}_k, \quad (5a)$$

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1} = \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1} - \mathbf{D}_k \mathbf{e}, \quad (5b)$$

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \Sigma_{k|k-1}^{-1}, \quad (5c)$$

$$\Sigma_{k|k-1} = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k, \quad (5d)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{F}_k (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k, \quad (5e)$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité de dimension appropriée,  $\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}$  est l'état estimé *a priori*, dont la matrice de covariance d'erreur d'estimation est  $\mathbf{P}_{k+1|k}$ . Le filtre est initialisé avec l'état  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \hat{\mathbf{x}}_{0|-1}$  et la covariance  $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_{0|-1}$ . La grandeur  $\tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}$  est l'innovation du filtre de Kalman et sa matrice de covariance est  $\Sigma_{k|k-1}$ . On remarquera enfin qu'avec de telles équations, le calcul du gain de Kalman  $\mathbf{K}_k$  et des covariances  $\mathbf{P}_{k+1|k}$  et  $\Sigma_{k|k-1}$  est indépendant de  $\{\mathbf{u}_k\}$ ,  $\{\mathbf{y}_k\}$  et de  $\mathbf{e}$ .

Considérons deux filtres de Kalman utilisant le même modèle (1)-(3), les mêmes commandes  $\{\mathbf{u}_k\}$  et mesures  $\{\mathbf{y}_k\}$ , les mêmes covariances  $\{\mathbf{Q}_k\}$ ,  $\{\mathbf{R}_k\}$  et la même initialisation  $\hat{\mathbf{x}}_0$ ,  $\mathbf{P}_0$  :

- le premier filtre estime l'état  $\{\mathbf{x}_k\}$  en utilisant les relations récurrentes (5) et fournit par conséquent des estimées non biaisées, le modèle utilisé par le filtre étant le même que celui du système réel,
- le second filtre utilise lui aussi les relations (5) mais considère que  $\mathbf{e} = \mathbf{0}$  ( $\mathbf{0}$  désignant le vecteur nul de dimension appropriée). Les estimées fournies par ce filtre sont donc biaisées car celui-ci n'adopte pas la bonne valeur pour  $\mathbf{e}$ .

Dorénavant, nous affecterons l'exposant  $nb$  à l'état et l'innovation calculés par le premier filtre (et donc non biaisés) et l'exposant  $b$  aux mêmes grandeurs obtenues par le second filtre (et donc biaisées). Les couples  $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{nb}, \tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^{nb})$  et  $(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^b, \tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^b)$  sont *a priori* différents l'un de l'autre. Ce n'est pas le cas pour les covariances et le gain de Kalman qui, on le rappelle, sont indépendants de  $\mathbf{e}$  : ces grandeurs ne seront par conséquent affectées d'aucun exposant. Posons :

$$\boldsymbol{\varepsilon}_k = \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{nb} - \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^b, \quad (6)$$

avec  $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \mathbf{0}$  car  $\hat{\mathbf{x}}_0^{nb} = \hat{\mathbf{x}}_0^b = \hat{\mathbf{x}}_0$ . La relation (5b) conduit directement à :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^b - \tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^{nb} &= \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^b - \mathbf{D}_k \mathbf{0} \\ &\quad - \left( \mathbf{y}_k - \mathbf{H}_k \hat{\mathbf{x}}_{k|k-1}^{nb} - \mathbf{D}_k \mathbf{e} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

c'est-à-dire :

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^b = \mathbf{H}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{e} + \tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^{nb}. \quad (8)$$

De même, l'équation (5a) permet d'écrire :

$$\varepsilon_{k+1} = \mathbf{F}_k \varepsilon_k + \mathbf{F}_k \mathbf{K}_k \left( \tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^{nb} - \tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^b \right), \quad (9)$$

ce qui, en utilisant le résultat (8), se reformule aisément comme suit :

$$\varepsilon_{k+1} = \mathbf{F}_k (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \varepsilon_k - \mathbf{F}_k \mathbf{K}_k \mathbf{D}_k e \quad (10)$$

avec  $\varepsilon_1 = \mathbf{0}$ . Il est alors trivial de montrer par récurrence que :

$$\varepsilon_k = \mathbf{M}_k e, \quad (11)$$

où :

$$\begin{cases} \mathbf{M}_{k+1} = \mathbf{F}_k (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{M}_k - \mathbf{F}_k \mathbf{K}_k \mathbf{D}_k, \\ \mathbf{M}_1 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (12)$$

Ainsi, en vertu de la relation (8), on obtient le résultat suivant :

$$\tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^b = (\mathbf{H}_k \mathbf{M}_k + \mathbf{D}_k) e + \tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^{nb}, \quad (13)$$

### 3.2 Mise en œuvre de la méthode

Adoptons maintenant un point de vue pratique, en supposant le vecteur  $e$  inconnu. Dans ce cas, il n'est bien évidemment pas possible d'implémenter le filtre de Kalman non biaisé introduit dans la section précédente. En revanche, la mise en œuvre du filtre biaisé est toujours possible puisque ce dernier considère que  $e = \mathbf{0}$ . De ce fait, les innovations  $\{\tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^b\}$  ainsi que leurs matrices de covariance  $\{\Sigma_{k|k-1}\}$  sont en pratique connues. En outre, il est à noter que les innovations  $\{\tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^{nb}\}$  issues du filtre non biaisé représentent une séquence blanche, centrée (il s'agit du filtre non biaisé) et de covariances  $\{\Sigma_{k|k-1}\}^1$ . Autrement dit,  $\{\tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^{nb}\}$  est assimilable à un bruit blanc centré de covariance  $\Sigma_{k|k-1}$  connue pour chaque instant  $k$ . Ainsi, la relation (13) représente une régression linéaire perturbée par un bruit blanc dont les caractéristiques sont connues. Il est alors trivial d'exploiter cette relation pour estimer  $e$  via un module de moindres carrés récursifs. En pratique, pour estimer des défauts d'amplitude variable (vecteur  $e$  non constant), il est préférable d'utiliser un algorithme de moindres carrés à facteur d'oubli ou à fenêtre glissante [18, chap. 7], voire une combinaison des deux [19]. Par commodité pour le lecteur, nous rappelons sur la figure 1 l'algorithme des moindres carrés à fenêtre glissante. Ce dernier présente trois paramètres qui sont :

- l'amplitude initiale estimée  $\hat{e}_1$  des défauts, pour laquelle un choix raisonnable est  $\hat{e}_1 = \mathbf{0}$  (ce qui revient à considérer qu'il n'y a *a priori* aucun défaut de capteur) ;
- la covariance initiale  $\mathbf{S}_1$  d'erreur d'estimation des amplitudes de défauts. Le réglage de cette matrice est assez empirique : il faut notamment que ses coefficients soient réglés en fonction des amplitudes potentielles de défaut ;
- la largeur  $h$  de la fenêtre glissante, qui résulte d'un compromis :

- plus  $h$  est petit, meilleure sera l'aptitude du module de moindres carrés à estimer des défauts d'amplitude variable. En revanche, une trop faible valeur de  $h$  peut conduire à une mauvaise qualité d'estimation

(voire même une inobservabilité) des amplitudes de défaut<sup>2</sup>.

- plus  $h$  est grand, meilleure sera la qualité d'estimation des amplitudes de défaut. En revanche, cela se fait au détriment de la faculté du module à s'adapter à des défauts d'amplitude variable. Par conséquent, lors de l'apparition brusque d'un défaut (rupture), l'amplitude estimée mettra plus de temps à prendre une valeur sensiblement non nulle, ce qui risque de d'introduire un retard à la de détection du défaut.

- Pour  $k = 1$ , initialiser l'algorithme avec  $\hat{e}_1$  et  $\mathbf{S}_1$ .

- Pour  $1 < k \leq h$ , calculer :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{M}_k + \mathbf{D}_k, \\ \mathbf{S}_k &= \mathbf{S}_{k-1} \mathcal{H}_k^T (\Sigma_{k|k-1} + \dots \\ &\quad \dots \mathcal{H}_{k-1} \mathbf{S}_{k-1} \mathcal{H}_{k-1}^T)^{-1} \mathcal{H}_k \mathbf{S}_{k-1}, \\ \mathbf{L}_{k|k} &= \mathbf{S}_k \mathcal{H}_k^T \Sigma_{k|k-1}^{-1}, \\ \hat{e}_k &= \hat{e}_{k-1} + \mathbf{L}_{k|k} (\tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^b - \mathcal{H}_k \hat{e}_{k-1}). \end{aligned}$$

- Pour  $k > h$ , calculer :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_k &= \mathbf{H}_k \mathbf{M}_k + \mathbf{D}_k, \\ \mathcal{H}_{k-h} &= \mathbf{H}_{k-h} \mathbf{M}_{k-h} + \mathbf{D}_{k-h}, \\ \mathbf{S}_k^* &= \mathbf{S}_{k-1} + \mathbf{S}_{k-1} \mathcal{H}_{k-h}^T (\Sigma_{k-h|k-h-1} + \dots \\ &\quad \dots \mathcal{H}_{k-h} \mathbf{S}_{k-1} \mathcal{H}_{k-h}^T)^{-1} \mathcal{H}_{k-h} \mathbf{S}_{k-1}, \\ \mathbf{S}_k &= \mathbf{S}_k^* - \mathbf{S}_k^* \mathcal{H}_k^T (\Sigma_{k|k-1} + \dots \\ &\quad \dots \mathcal{H}_k \mathbf{S}_k^* \mathcal{H}_k^T)^{-1} \mathcal{H}_k \mathbf{S}_k^*, \\ \mathbf{L}_{k|k-h} &= \mathbf{S}_k \mathcal{H}_{k-h}^T \Sigma_{k-h|k-h-1}^{-1}, \\ \mathbf{L}_{k|k} &= \mathbf{S}_k \mathcal{H}_k^T \Sigma_{k|k-1}^{-1}, \\ \hat{e}_k &= \hat{e}_{k-1} + \mathbf{L}_{k|k} (\tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^b - \mathcal{H}_k \hat{e}_{k-1}) - \dots \\ &\quad \dots \mathbf{L}_{k|k-h} (\tilde{\mathbf{y}}_{k-h|k-h-1}^b - \mathcal{H}_{k-h} \hat{e}_{k-1}). \end{aligned}$$

FIG. 1 – Algorithme des moindres carrés à fenêtre glissante.

L'opération de détection (et implicitement la localisation) des défauts s'effectue en comparant à un seuil les amplitudes de défaut estimées. La  $i^{\text{ème}}$  composante de ce seuil vectoriel peut par exemple être proportionnelle à l'écart-type estimé, c'est-à-dire la racine carrée du  $i^{\text{ème}}$  terme diagonal de la matrice de covariance d'erreur d'estimation  $\mathbf{S}_k$  propagée par le module de moindres carrés. Dans le cas particulier où les bruits  $\{\mathbf{w}_k\}$  et  $\{\mathbf{v}_k\}$  ainsi que l'état initial  $\mathbf{x}_0$  sont distribués selon une loi normale, l'innovation  $\{\tilde{\mathbf{y}}_{k|k-1}^b\}$  suit elle aussi une loi normale. Par conséquent, l'erreur d'estimation de  $e$  par  $\hat{e}_k$  est également décrite par une gaussienne. Il est alors possible de quantifier à l'aide de tables [21] la probabilité pour que l'estimée  $\hat{e}_k$  dépasse un seuil de  $n$  fois l'écart-type alors que la valeur réelle est nulle : cela revient à évaluer la probabilité de fausse alarme. Par exemple, si le seuil adopté est de 3 fois l'écart-type, alors la probabilité de fausse alarme est inférieure à 1%.

<sup>2</sup>Précisons qu'une analyse quantitative de l'observabilité des défauts est possible à l'aide du grammien d'observabilité [20, chap. 1], qui consiste à analyser la singularité du grammien d'observabilité  $\mathcal{W}_k$  :

$$\mathcal{W}_k = \sum_{i=k-h+1}^k \mathcal{H}_i^T \Sigma_{i|i-1}^{-1} \mathcal{H}_i.$$

Plus la plus petite des valeurs propres de  $\mathcal{W}_k$  est grande, meilleur est le degré d'observabilité des amplitudes de défaut.

<sup>1</sup>Voir par exemple [17] pour les propriétés de l'innovation.

## 4 Application

Soit un système du type (1)-(2) avec :

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{G}_k = \mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$\mathbf{x}_0 = [3 \quad -2]^T, \quad \mathbf{P}_0 = \mathbf{Q}_k = \mathbf{R}_k = \mathbf{I}.$$

A l'aide du critère de Kalman, il est aisé de voir que ce système est commandable ainsi qu'observable à partir des mesures en provenance des capteurs 1 et 2<sup>3</sup> ou du seul capteur 1. En revanche, il n'est pas observable en utilisant uniquement le capteur 2, ce qui empêche l'utilisation d'un banc de filtres DOS<sup>4</sup>. Le système étant commandable, nous appliquons un simple retour d'état de sorte que les pôles du système en boucle fermée soient 0,6 et 0,8 (système stable). Cela conduit à la matrice de retour d'état suivante :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -7.6 & 2 \\ 0 & 3.2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

associée à la loi de commande :

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{e}_k - \mathbf{K}\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \quad (16)$$

où  $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$  est l'état estimé *a posteriori* par le filtre de Kalman et  $\mathbf{e}_k$  est la consigne, que l'on impose comme suit :

$$\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} 18 \sin(0.3k) \\ 12 \sin(0.2k) \end{bmatrix}. \quad (17)$$

### 4.1 Résultats en l'absence de défaut de capteur

En l'absence de défaut de capteur, les états vrai, désiré<sup>5</sup> et estimé via un filtre de Kalman sont donnés sur la figure 2.

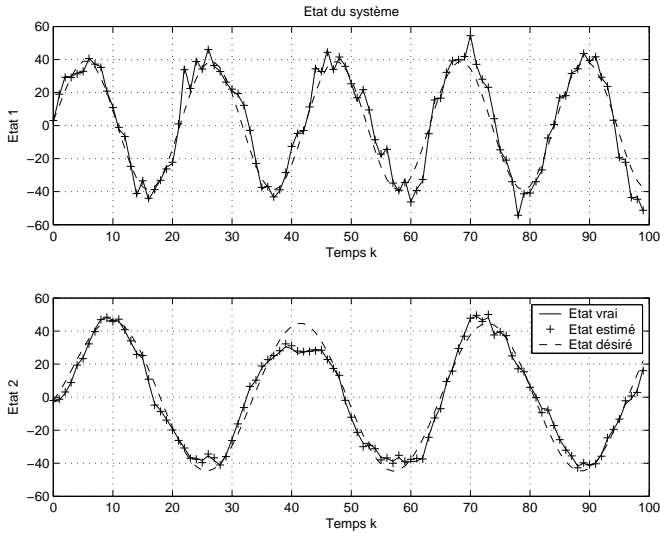


FIG. 2 – États vrai, estimé et désiré en l'absence de défaut de capteur

<sup>3</sup>Pour simplifier, nous appellerons "capteur  $i$ " ( $i = 1, 2$ ) le capteur mesurant la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $\mathbf{y}$ .

<sup>4</sup>A noter qu'en l'occurrence, un DOS est équivalent à un GOS car  $n_y = 2$ .

<sup>5</sup>L'état désiré  $\mathbf{x}_k^d$  est obtenu via l'équation récurrente :

$$\mathbf{x}_{k+1}^d = (\mathbf{F}_k - \mathbf{G}_k \mathbf{K}) \mathbf{x}_k^d + \mathbf{G}_k \mathbf{e}_k,$$

initialisée à :  $\mathbf{x}_0^d = \mathbf{x}_0$ , ce qui correspond à la simulation du système bouclé.

En ce qui concerne les amplitudes de défauts, nous cherchons à estimer celles relatives à chacun des deux capteurs, ce qui veut dire que nous posons :  $\mathbf{D}_k = \mathbf{I}$ . Concernant le module de moindres carrés, nous adoptons un algorithme à fenêtre glissante avec une largeur de fenêtre réglée pour l'instant à  $h = 5$  mesures et une covariance initiale  $\mathbf{S}_1 = 10\mathbf{I}$ . Les amplitudes défaut estimées ainsi que les écarts-types correspondants (racine carrée du terme diagonal de  $\mathbf{S}_k$ ) sont donnés sur la figure 3. On peut notamment y constater que les amplitudes estimées sont en moyenne nulle et toujours comprises dans l'enveloppe  $\pm 3$  fois l'écart-type.

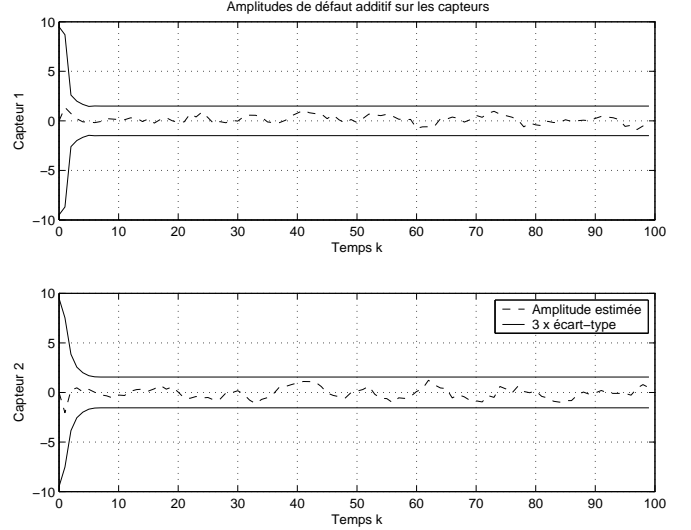


FIG. 3 – Amplitudes estimées en l'absence de défaut de capteur et écarts-types correspondants

### 4.2 Résultats en présence de défauts de capteur

Simulons maintenant les défauts suivants sur les mesures :

- dérive de 0,05 par unité de temps (une unité de temps étant égale à une période d'échantillonnage) sur le capteur 1,
- un biais d'amplitude 5 sur le capteur 1 entre les instants  $k = 70$  et  $k = 90$ , s'ajoutant à la dérive précitée,
- un biais d'amplitude -7 entre les instants  $k = 25$  et  $k = 50$ , suivi d'un autre biais d'amplitude 3 à partir de l'instant  $k = 70$  sur le capteur 2.

Nous conservons les mêmes réglages pour le module de moindres carrés. Les résultats obtenus sont donnés sur les figures 4 et 5.

On peut clairement constater qu'en l'absence de défaut (15 premiers instants pour le capteur 1, 25 premiers instants pour le capteur 2), les amplitudes de défaut estimées avoisinent 0 et sont comprises dans l'enveloppe  $\pm 3$  fois l'écart-type. Ce n'est plus le cas lorsqu'il y a un défaut, ce qui confirme le fait que le seuil de 3 fois l'écart-type semble être un bon choix. En outre, la présence de défauts simultanés ne pose aucun problème. Enfin, on soulignera le fait que cette méthode permet non seulement de détecter, localiser, mais également d'estimer les défauts, ce qui peut être utile dans certains cas (acommodation de loi de commande par exemple). Les estimées ne sont certes pas très précises mais cela est dû à la faible largeur de la fenêtre glissante du module de moindres carrés. Nous allons de ce fait étudier l'impact de la largeur de fenêtre dans la section qui suit.

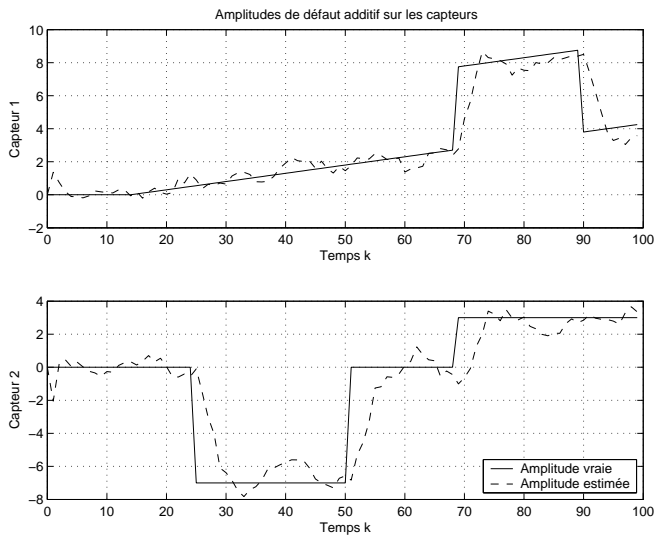


FIG. 4 – Défauts simulés et estimés

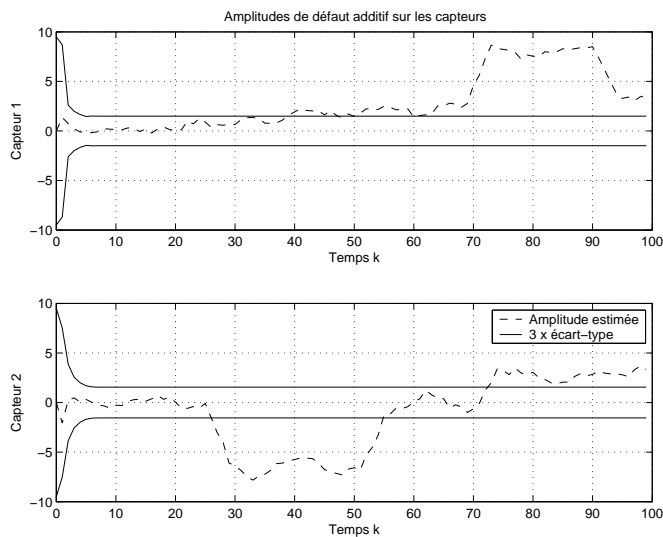


FIG. 5 – Amplitudes de défauts estimées et écarts-types d'erreur d'estimation correspondants

### 4.3 Impact de la largeur de la fenêtre du module de moindres carrés

Dans cette section, nous reprenons les mêmes conditions de simulation que précédemment, à l'exception près de la largeur de fenêtre qui est réglée à  $h = 50$  mesures. Les résultats obtenus en l'absence de défauts sont donnés sur la figure 6 tandis que ceux obtenus avec défaut sont disponibles sur les figures 7 et 8.

On constate que les estimées obtenues sont moins bruitées (et par conséquent plus précises en l'absence de défaut) mais évoluent effectivement de manière plus lente, ce qui introduit notamment un retard à la détection du début et de la fin des défauts. Ainsi, il semble préférable d'opter pour une valeur de  $h$  pas trop élevée, le réglage  $h = 5$  mesures se montrant satisfaisant.

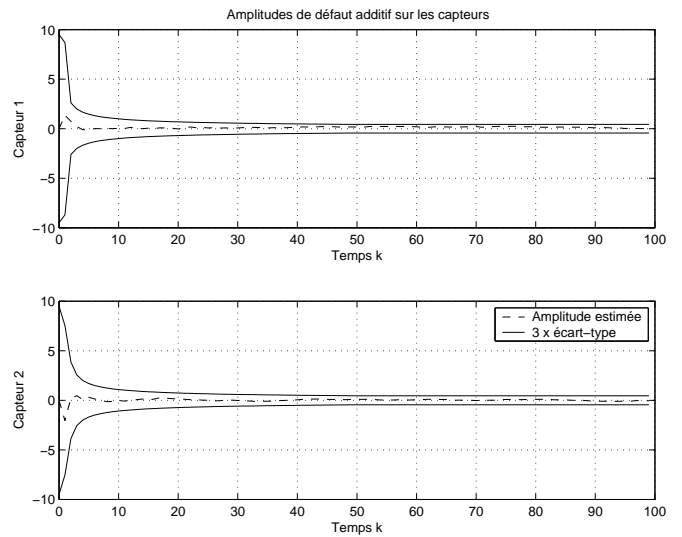


FIG. 6 – Amplitudes estimées en l'absence de défaut de capteur et écarts-types correspondants avec une fenêtre de 50 mesures

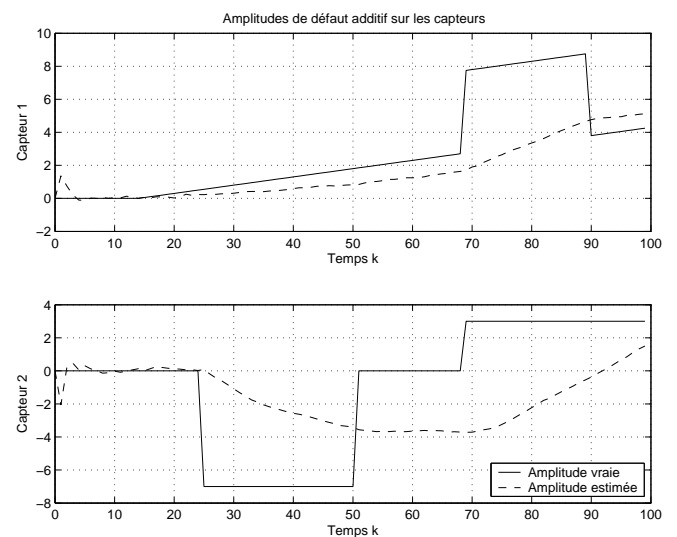


FIG. 7 – Défauts simulés et estimés avec une fenêtre de 50 mesures

## 5 Conclusion et perspectives

Dans cet article, nous avons présenté une méthode d'estimation de défauts additifs de capteurs permettant directement de détecter et localiser des défauts. Celle-ci se base sur une relation de régression linéaire entre l'amplitude (inconnue) des défauts et l'innovation (connue) d'un filtre de Kalman, qui est exploitée par un algorithme de moindres carrés à fenêtre glissante. L'efficacité de l'approche a été illustrée par l'exemple simple d'un système d'ordre 2. En outre, un des avantages de l'approche proposée est sa structure, puisqu'elle se résume à la simple adjonction d'un module de moindres carrés au filtre de Kalman implémenté, sans affecter ce dernier. Parmi les perspectives de ce travail, il y a bien évidemment la généralisation de cette méthode au cas de défauts simultanés capteurs-actionneurs, laquelle se fait sans problème en adoptant une démarche analogue<sup>6</sup>. Parmi les autres voies à explorer, il y a la généralisation de ce travail au cas non linéaire, ce qui repré-

<sup>6</sup>Ce travail vient d'être réalisé et soumis au colloque C2I 2010 [22].

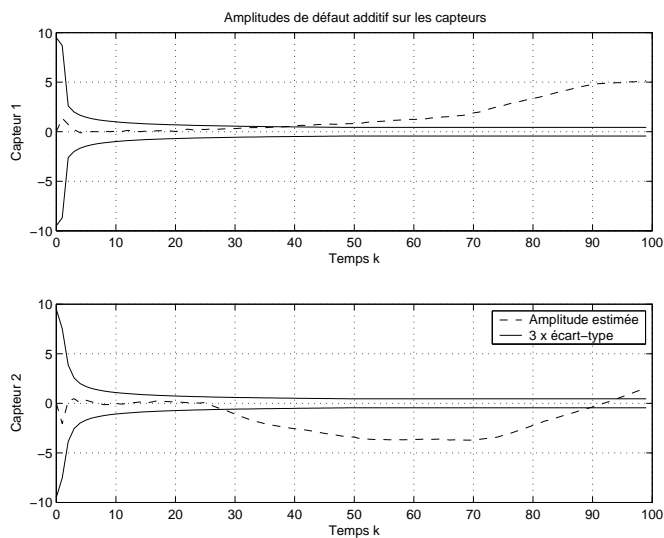


FIG. 8 – Amplitudes de défauts estimées et écarts-types d'erreur d'estimation correspondants avec une fenêtre de 50 mesures

sente une tâche beaucoup plus ardue. En effet, dans ce cas, les matrices  $F_k$  et  $H_k$  utilisées dans l'algorithme du filtre de Kalman sont les jacobiens des fonctions d'état et de mesure calculés en l'état estimé ; cela introduit une dépendance des matrices de covariance et du gain de Kalman vis-à-vis de l'état estimé, ce qui met en défaut la théorie exploitée ici. Pour contourner le problème, on pourrait essayer de quantifier l'impact des défauts de capteur sur les jacobiens puis sur les matrices de covariance et le gain de Kalman, mais cela semble très compliqué. Parmi les autres possibilités, évoquons le calcul des jacobiens autour d'un état non affecté par les défauts (principe du filtrage de Kalman linéarisé [20, chap. 5]), ou encore la linéarisation statistique [23, chap. 6] autour de l'état compensé (état estimé auquel l'effet évalué des défauts a été compensé). Enfin, il serait intéressant d'étudier l'impact des incertitudes/méconnaissances de modèle sur la méthode proposée. Cela fera l'objet de nos futurs travaux de recherche.

## Références

- [1] R. PATTON et P.M. Frank et R. CLARK : *Fault diagnosis in dynamic systems. Theory and application*. Prentice Hall inc., 1989.
- [2] G. ZWINGELSTEIN : *Diagnostic des défaillances : théorie et pratique pour les systèmes industriels*. Traité des nouvelles technologies, série diagnostic et maintenance, Hermès, 1995.
- [3] D. MAQUIN et J. RAGOT : *Diagnostic des systèmes linéaires*. Hermès, 2000.
- [4] R. ISERMANN : *Fault-diagnosis systems*. Springer-Verlag, 2006.
- [5] V. SIRCOULOMB, G. HOBLOS et H. CHAFOUK : A fault tolerant Kalman filter bank. *Best of book of the AMSE*, Rouen:99–108, 2005.
- [6] Y.T. CHAN, A.G.C. HU et J.B. PLANT : A Kalman filter based tracking scheme with input estimation. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 15(2): 237–244, 1979.
- [7] T.C. WANG et P.K. VARSHNEY : A tracking algorithm for maneuvering targets. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 29(3):910–924, 1993.
- [8] A.S. WILLSKY et H.L. JONES : A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 21(1):108–112, 1976.
- [9] A.S. WILLSKY, E.Y. CHOW, S.B. GERSHWIN, C.S. GREENE, P.K. HOUPAND et A.L. KURKJIAN : Dynamic model-based techniques for the detection of incidents on freeways. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 25(3):347–360, 1980.
- [10] F.M. SAMI, P. COLONERI et N. MARIUS :  $H_2$  robust fault estimation for periodic systems. *In American Control Conference*, pages 2973–2978, Denver, Co., U.S.A., 2003.
- [11] B. JIANG, M. STAROSWIECKI et V. COCQUEMOT : Fault estimation in nonlinear uncertain systems using robust/sliding-mode observers. *IEE Proceedings on Control Theory*, 151(1):29–37, 2004.
- [12] B. JIANG et F.N. CHOWDHURY : Fault estimation and accomodation for linear MIMO discrete-time systems. *IEEE Transactions on Control System Technology*, 13(3): 493–499, 2005.
- [13] C. EDWARDS et C.P. TAN : Sensor fault tolerant control using sliding mode observers. *Control Engineering and Practice*, 14(8):897–908, 2006.
- [14] X.G. YAN et C. EDWARDS : Nonlinear robust fault reconstruction and estimation using a sliding mode observer. *Automatica*, 43(9):1605–1614, 2007.
- [15] Z. GAO et S.X. DING : Actuator fault robust estimation and fault-tolerant control for a class of nonlinear descriptor systems. *Automatica*, 43(5):912–920, 2007.
- [16] H. JAMOULI et D. SAUTER : A new adaptive Kalman estimator integrated in a fault-tolerant control system. *In IEEE Mediterranean conference on control and automation*, Athens, Greece, 2007.
- [17] B.D.O. ANDERSON et J.B. MOORE : *Optimal filtering*. Prentice Hall inc., 1979.
- [18] P. BORNE, G. DAUPHIN-TANGUY, J.P. RICHARD, F. ROTELLA et I. ZAMBETTAKIS : *Modélisation et identification des processus*. Tome 2. Technip, 1992.
- [19] K. MAOUCHE et D.T.M. SLOCK : The generalized sliding window recursive least-squares algorithm. Rapport technique 95-021, Institut EURECOM, 1995.
- [20] M.S. GREWAL et A.P. ANDREWS : *Kalman filtering. Theory and practice using MATLAB*. John Wiley & sons inc., 2001.
- [21] L. DEVROYE : *Non uniforme random variate generation*. Springer-Verlag, 1986.
- [22] V. SIRCOULOMB, G. HOBLOS et H. CHAFOUK : Détection et localisation de défauts simultanés de capteurs et d'actionneurs par estimation. Soumis à C2I 2010, Le Mans.
- [23] A. GELB, J.F. KASPER, R.A. NASH, C.F. PRICE et A.A. SUTHERLAND : *Applied optimal estimation*. MIT Press, 1974.