

# Diagnostic des systèmes dynamiques linéaires sans modèle explicite

A. Moussa Ali<sup>\*</sup>, C. Join<sup>\*,\*\*</sup>, F. Hamelin<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> CRAN, Nancy-Université, CNRS, BP 70 239, 54506 Vandœuvre,  
France

e-mail : {amoussaa,cjoin,fhamelin}@cran.uhp-nancy.fr

<sup>\*\*</sup> ALIEN-INRIA, France. email : cedric.join@inria.fr

---

## Résumé

Dans cet article, nous proposons une méthode de diagnostic de défauts actionneur et capteur de type structuré pour une classe de systèmes dynamiques linéaires incertains. Le principal atout de cette approche est qu'il est possible, sous certaines hypothèses, de détecter, localiser et identifier les défauts à l'aide des seules mesures de la commande et de la sortie sans avoir à identifier les paramètres du modèle. La méthode est fondée sur la génération et l'analyse de relations de redondance analytiques et exploite le fait qu'un signal structuré satisfait une équation différentielle. Cette caractérisation des signaux structurés nous permet de transformer le problème de diagnostic en un problème d'analyse de pseudo-spectres de faisceaux de matrices. La prise de décision est entièrement fondée sur l'évolution temporelle des estimations de certaines caractéristiques des défauts. Un exemple numérique est fourni et commenté afin d'illustrer l'approche proposée.

Keywords: Théorie des distributions, analyse spectrale, défaut actionneur, défaut capteur, FDI

---

## 1. INTRODUCTION

Le diagnostic est défini comme l'ensemble des actions mises en œuvre en vue de détecter, localiser et identifier tout phénomène anormal sur un système. On trouvera dans (Isermann [2006]) et (Patton et al. [2000]) (ainsi qu'à travers leurs références) les méthodes classiques utilisant l'information analytique et permettant de faire du diagnostic robuste tant par rapport aux entrées inconnues que par rapport aux incertitudes paramétriques. Ces méthodes reposent non seulement sur une connaissance structurelle du système, mais requiert également une connaissance de ses paramètres qui peut être plus ou moins précise. L'approche présentée dans cet article repose uniquement sur la connaissance structurelle du système ainsi que celle des signaux défauts. Plus précisément on considèrera les systèmes régis par une équation différentielle linéaire à coefficients constants et des défauts actionneur et capteur additifs dits structurés (Fliess and Sira-Ramirez [2003]). On adoptera dans cet article des formulations distributionnelles (également utilisées dans Belkoura and Richard [2006]). Ces formulations permettront de transformer le problème de détection de défauts en un problème d'analyse de pseudospectre de faisceaux de matrices, à partir duquel ni la connaissance, ni l'estimation des paramètres du modèle ne sont nécessaires pour la détection de défauts. Le document est organisé comme suit. La section 2 est consacrée aux rappels des outils d'analyse mathématique utilisés dans le document. Dans la section 3, nous fixons les différentes hypothèses sur la structure du système et celles des signaux de défaut avant de définir et résoudre le problème de diagnostic. La section 4 applique la méthode à un système du premier ordre.

## 2. OUTILS D'ANALYSE MATHÉMATIQUE

Nous rappelons dans cette section certaines notions de la théorie des distributions et de faisceaux de pseudospectre de matrices que nous utiliserons pour le développement de la méthode proposée.

### 2.1 Théorie des distributions (Schwartz [1966])

Une distribution est une fonctionnelle linéaire, continue et définie sur l'ensemble des fonctions régulières à support (partie du domaine de définition sur laquelle se concentre l'information utile) compact (fermé et borné). On dit qu'une distribution s'annule sur un ensemble  $\Omega$  si elle s'annule sur toutes les fonctions à support inclus dans  $\Omega$ . Le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel  $T$  est identiquement nulle s'appelle support de  $T$  (noté  $Supp(T)$ ). On définit aussi l'ordre d'une distribution  $T$  (noté  $Ordre(T)$ ) comme le plus petit entier naturel  $m$ , s'il existe, tel que :  $\exists C > 0$ , pour toute fonction régulière  $\phi$ , on a  $|T(\phi)| \leq C \sup_{0 \leq i \leq m} \|\phi^{(i)}\|_\infty$

*Exemple 2.1.*  $Ordre(\delta_\tau) = 0$  et  $Supp(\delta_\tau) = \{\tau\}$  où  $\delta_\tau$  est la distribution de Dirac retardée.

La théorie des distributions étend la notion de dérivée à toutes les fonctions localement intégrables. Si la fonction  $f$  est une fonction continue, excepté au point  $x$  où elle présente un saut fini  $s_x$ , alors la dérivée de la distribution associée à  $f$  est donnée par  $\dot{f} - s_x \delta_x$ , avec  $\dot{f}$  la dérivée usuelle de  $f$ . Les opérations de dérivation, d'intégration et de translation peuvent être traduites par des produits de convolution :

$$\dot{y} = \delta^{(1)} * y, \int_0^t y = H * y, y(t - \tau) = \delta_\tau * y$$

avec  $H$  l'échelon unitaire (Heaviside). Le théorème qui suit est le résultat principal sur lequel se fonde la méthode de détection et localisation de défauts présentée.

*Théorème 2.1.* (Schwartz [1966])

La multiplication d'une distribution  $T$  à support compact ( $Supp(T)$  compact) et d'ordre fini  $m$  par une fonction régulière  $\alpha$  s'annulant ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre  $m$  sur  $Supp(T)$ , est une distribution nulle (i.e  $\alpha T = 0$ ).

Ainsi on a  $(t - \tau)^k \delta_\tau^{(n)} = 0$  pour  $k > n$ . Enfin on a, pour toutes distributions  $S$  et  $T$  (dont la convolution est bien définie) et tout  $t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ , l'égalité suivante :

$$t^n (S * T) = \sum_{k=0}^n C_n^k (t^k S) * (t^{n-k} T) \quad (1)$$

## 2.2 Analyse spectrale

Soient  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k$  des matrices de  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . On suppose qu'il existe au moins un vecteur  $\tilde{\beta}$  qui réduit le rang du faisceau de matrices  $\tilde{A}_0 - \tilde{\beta}_1 \tilde{A}_1 - \tilde{\beta}_2 \tilde{A}_2 - \dots - \tilde{\beta}_k \tilde{A}_k$ , c'est-à-dire qu'il existe  $\tilde{X} \in \mathbb{R}^n / \{0\}$  tel que

$$(\tilde{A}_0 - \tilde{\beta}_1 \tilde{A}_1 - \tilde{\beta}_2 \tilde{A}_2 - \dots - \tilde{\beta}_k \tilde{A}_k) \tilde{X} = 0 \quad (2)$$

Soient maintenant  $A_0, A_1, \dots, A_k$  des matrices engendrées par perturbation des matrices  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k$ . Le problème que l'on veut résoudre dans cette section est le suivant : connaissant les matrices perturbées  $A_0, A_1, \dots, A_k$  (sans connaître les matrices  $\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k$ ), on souhaite déterminer le vecteur  $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$  solution du problème

$$\begin{cases} \min_{\|X\|=1, \beta} \|(A_0 - \beta_1 A_1 - \beta_2 A_2 - \dots - \beta_k A_k) X\|^2 \\ (A_0 - \beta_1 \tilde{A}_1 - \beta_2 \tilde{A}_2 - \dots - \beta_k \tilde{A}_k) X = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Notons que si la norme  $\|\bullet\|$  considérée est la norme quadratique  $\|\bullet\|_2$ , alors la quantité  $\min_{\|X\|=1, \beta} \|(A_0 - \beta_1 A_1 - \beta_2 A_2 - \dots - \beta_k A_k) X\|$  est exactement  $\sigma_{\min}(A_0 - \beta_1 A_1 - \beta_2 A_2 - \dots - \beta_k A_k)$ , où  $\sigma_{\min}(\bullet)$  désigne la plus petite valeur singulière. Ainsi le problème énoncé ci-dessus peut être remplacé par la recherche de  $\beta$  solution de

$$\begin{cases} \min_{\beta} \sigma_{\min}(A_0 - \beta_1 A_1 - \beta_2 A_2 - \dots - \beta_k A_k) \\ (\tilde{A}_0 - \beta_1 \tilde{A}_1 - \beta_2 \tilde{A}_2 - \dots - \beta_k \tilde{A}_k) X = 0 \\ \|X\| = 1 \end{cases} \quad (4)$$

Posons pour  $\epsilon \geq 0$

$$\Lambda_\epsilon(A_0, \dots, A_k) = \{\lambda \in \mathbb{R}^n : \sigma_{\min}(A_0 - \lambda_1 A_1 - \dots - \lambda_k A_k) \leq \epsilon\}$$

Les ensembles  $\Lambda_\epsilon(A_0, \dots, A_k)$  sont plus susceptibles d'être vides pour de petites valeurs de  $\epsilon$ . En revanche, en faisant croître la valeur de  $\epsilon$ , on obtient une famille d'ensembles  $\Lambda_{\epsilon_0}(\tilde{A}_0, \dots, \tilde{A}_k) \neq \emptyset$ . Ainsi, l'estimation de  $\beta$  (solution des problèmes (3) et (4)) peut être obtenu par l'estimation des minima locaux de cette famille d'ensembles. Le cas  $k = 1$  a déjà fait l'objet de quelques études dans la littérature (Boutry et al. [2005] et Wright and Trefethen [2002]) et est connu sous le nom de pseudospectre de faisceau de matrices. Pour  $k > 1$ , on va montrer qu'avec des dimensions  $m$  et  $n$  convenables, on peut toujours se ramener au cas  $k = 1$ .

*Définition 2.1.* (Conoyau d'une matrice)

Le conoyau d'une matrice  $M$ , noté  $coker(M)$ , est une matrice  $N$  telle que  $NM = 0$ . Le conoyau d'une matrice n'est pas unique.

Soient  $m, n \in \mathbb{N}$  avec  $m > n$  et  $A$  une matrice de  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Il existe une matrice orthogonale  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$  et une matrice triangulaire rectangle  $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$  telles que  $A = QR$ . Cette décomposition est connue sous le nom de factorisation  $qr$ . Elle nous fournit également un conoyau de dimension  $((m - n) \times m)$  de la matrice  $A$ , il s'agit de la matrice  $N$  dont les lignes sont les transposées des  $m - n$  dernières colonnes de  $Q$  (i.e  $N = Q(:, n + 1 : m)^T$ ). En effet,  $Q$  étant orthogonale, on a

$$\begin{aligned} NQ &= [0_{m-n, n} \ I_{m-n}] \text{ et} \\ NA &= NQR \\ &= [0_{m-n, n} \ I_{m-n}] R \\ &= 0_{m-n, n} R(1 : n, :) + I_{m-n} R(n + 1 : m, :) \\ &= 0_{m-n, n} \end{aligned}$$

Donnons à présent une résolution du problème énoncé ci-dessus. Soit  $m > (k - 1)n$  et considérons  $N_k$  le conoyau de la matrice  $A_k$  de dimension  $(m - n) \times m$  obtenu à partir de la décomposition  $qr$ , alors on peut écrire

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(A_0 - \beta_1 A_1 - \dots - \beta_k A_k) &= \\ \sigma_{\min}(N_k A_0 - \beta_1 N_k A_1 - \dots - \beta_{k-1} N_k A_{k-1}) & \end{aligned}$$

car  $\sigma_{\min}$  est invariable par transformation orthogonale. Soit maintenant  $N_{k-1} \in \mathbb{R}^{m-2n \times m}$  le conoyau de  $N_k \tilde{A}_{k-1}$ . On a

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(N_k A_0 - \beta_1 N_k A_1 - \dots - \beta_{k-1} N_k A_{k-1}) &= \\ \sigma_{\min}(N_{k-1} N_k A_0 - \dots - \beta_{k-2} N_{k-1} N_k A_{k-2}) & \end{aligned}$$

Et ainsi de suite, on aboutira à l'égalité

$$\begin{aligned} \sigma_{\min}(A_0 - \beta_1 A_1 - \dots - \beta_k A_k) &= \\ \sigma_{\min}(P_{1,k} A_0 - \beta_1 P_{1,k} A_1) & \end{aligned}$$

où  $P_{1,k} = N_2 N_3 \dots N_k$  et  $N_j$  de dimension  $m - (k - j + 1)n \times m$ , désigne le conoyau de  $N_{j+1} N_{j+2} \dots N_k A_{j+1}$ ,  $2 \leq j \leq k - 1$  (ceci justifie le choix  $m > (k - 1)n$ ). Ces opérations permettent la détermination de  $\beta_1$  et la même démarche permet d'estimer les autres composantes du vecteur  $\beta$  solution du problème.

Un algorithme évident de calcul de  $\underset{\lambda}{\operatorname{argmin}} \sigma_{\min}(A - \lambda B)$

pour  $A$  et  $B$  des matrices de même dimension consiste à évaluer  $\sigma_{\min}(A - \lambda_i B)$  pour des réels  $\lambda_i$  d'une certaine discrétisation et ainsi générer des courbes de niveaux sur lesquelles on relèvera les minima éventuels. Dans le cas de l'étude faite précédemment, pour chaque élément  $\beta_i$  cherché, le nombre de solutions distinctes varie entre 1 et  $\inf(n, m - (k - 1)n)$ . Des contraintes supplémentaires sur  $\beta$  permettront de chercher des solutions particulières aux problèmes (3) et (4).

Dans la prochaine section, nous montrons l'intérêt des notions présentées dans cette section, puisque la méthode de diagnostic que nous développons nous conduit à la

résolution d'un problème mis sous la forme (2), avec les matrices  $A_i$  dépendant des informations du système et le vecteur  $\beta$  contenant les paramètres à utiliser pour accomplir la tâche de diagnostic.

### 3. DÉTECTION ET LOCATION

#### 3.1 Contexte de l'étude

On considère le système ( $\Sigma$ ) dont les grandeurs réelles vérifient un système de la forme

$$\begin{cases} a_n y_r^{(n)} + a_{n-1} y_r^{(n-1)} + \dots + a_0 y_r = b u_r \\ y_r^i(0), i = 0, \dots, n-1 \end{cases} \quad (5)$$

Les paramètres  $a_i$ ,  $b$  ainsi que les conditions initiales sont supposés constants et non connus.

Dans le domaine fonctionnel (en gardant les mêmes notations pour les signaux et les distributions associées), on aura

$$a_n y_r^{(n)} + a_{n-1} y_r^{(n-1)} + \dots + a_0 y_r = b u_r + \phi_0 \quad (6)$$

avec  $\phi_0$ , une distribution combinaison linéaire des dérivées d'ordre inférieur ou égal à  $n-1$  de la distribution de Dirac  $\delta$  (contenant les conditions initiales).

En présence d'un défaut actionneur noté  $f_a$  et d'un défaut capteur noté  $f_c$ , les mesures  $u$  et  $y$  seront explicitées en fonction des grandeurs vraies et des défauts comme suit :  $u = u_r - f_a$  et  $y = y_r + f_c$  (figure 1). Comme

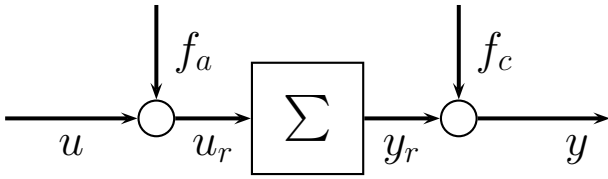


FIG. 1. Système avec défaut actionneur et défaut capteur.

mentionné à l'introduction, nous considérons des défauts additifs dits structurés (Fliess and Sira-Ramirez [2003]). D'une façon informelle, un signal est dit structuré s'il possède une transformation de Laplace classique ou bien s'il est solution d'une équation différentielle linéaire. Ces types de signaux recouvrent une grande plage de signaux défauts que l'on retrouve dans la littérature (rupture, défaut naissant ou intermittent).

Dans la suite, nous traitons le cas des défauts  $f_a$  et  $f_c$  modélisés par des échelons retardés (défauts abrupts), à savoir  $f_{a,c} = l_{a,c} H(t - \tau_{a,c})$ , avec  $\tau_a$ ,  $l_a$  et  $\tau_c$ ,  $l_c$  les temps d'apparition et amplitudes respectifs de  $f_a$  et  $f_c$ . Notons que la considération de cette structure particulière ne constitue pas une restriction à l'application de l'algorithme que nous allons développer, celui-ci pouvant s'appliquer au diagnostic de tous défauts de type structuré.

#### 3.2 système avec défaut actionneur

Sous l'hypothèse d'un défaut actionneur abrupt, l'équation (6) devient

$$a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y = \phi_0 + b u + b l_a H(t - \tau_a) \quad (7)$$

A partir de cette structure de modèle, des mesures de la commande  $u(t)$  et de la sortie  $y(t)$ , l'algorithme de

détection et localisation de défauts présenté par la suite ne requiert que la connaissance de l'ordre  $n$ . Les paramètres  $a_i$  et  $b$  du système sont supposés inconnus, et ne sont pas à estimer. Cet algorithme se compose de deux étapes : la première consiste à la génération des relations de redondance et la seconde à l'analyse de ces relations.

Pour la génération des relations de redondance, on dérive dans un premier temps l'équation du système en défaut, ce qui donne :

$$a_n y^{(n+1)} + \dots + a_0 y^{(1)} - b u^{(1)} = \phi_0^{(1)} + b l_a \delta_{\tau_a} \quad (8)$$

avec

$$(1) \text{ Supp}(\phi_0^{(1)}) = \{0\} \text{ et } \text{Ordre}(\phi_0^{(1)}) = n.$$

$$\text{Ainsi } t^k \phi_0^{(1)} = 0, \forall k > n$$

$$(2) \text{ Supp}(\delta_{\tau_a}) = \{\tau_a\} \text{ et } \text{Ordre}(\delta_{\tau_a}) = 0.$$

$$\text{Ainsi } (t - \tau_a) \delta_{\tau_a} = 0$$

Ainsi, pour éliminer les singularités du second membre de l'équation ci-dessus ( $\phi_0^{(1)}$ ,  $\delta_{\tau_a}$ ), il suffit, d'après le théorème (2.1), de multiplier l'égalité (8) par  $\alpha_1$  défini par

$$\alpha_1(t) = t^{n+1}(t - \tau_a)$$

ce qui donne

$$\alpha_1(a_n y^{(n+1)} + \dots + a_0 y^{(1)} - b u^{(1)}) = 0 \quad (9)$$

En développant l'égalité (9), on obtient l'égalité suivante

$$\left[ \sum_{j=0}^n a_j W_{2,j} - b V_2 \right] - \tau_a \left[ \sum_{j=0}^n a_j W_{1,j} - b V_1 \right] = 0 \quad (10)$$

avec  $W_{i,j} = t^{n+i} y^{(j+1)}$  et  $V_i = t^{n+i} u^{(1)}$  pour  $i = 1, 2$  et  $j = 0, \dots, n$ .  $W_{i,j}$  et  $V_i$  peuvent être exprimés en fonction des dérivées des termes  $t^k y$  et  $t^k u$  respectivement (théorème (2.1) et propriété (1)).

L'égalité (10) est vérifiée indépendamment de  $\tau_a$  ( $\tau_a$  n'est pas identifiable avant l'apparition du défaut). En effet pour  $t < \tau_a$ , on montre que

$$\left[ \sum_{j=0}^n a_j W_{2,j} - b V_2 \right] = \left[ \sum_{j=0}^n a_j W_{1,j} - b V_1 \right] = 0 \quad (11)$$

Cependant pour  $t \geq \tau_a$ , les redondances obtenues par application d'intégrations successives à l'égalité (10) conduit à la formulation spectrale suivante

$$[A_2 - \tau_a A_1] X = 0 \quad (12)$$

en posant, pour  $i = 1, 2$

$$A_i = \begin{pmatrix} H^{*n+1} * W_{i,n} & \dots & H^{*n+1} * V_i \\ H^{*n+2} * W_{i,n} & \dots & H^{*n+2} * V_i \\ H^{*n+3} * W_{i,n} & \dots & H^{*n+3} * V_i \\ \vdots & & \vdots \\ H^{*n+m} * W_{i,n} & \dots & H^{*n+m} * V_i \end{pmatrix} \quad (13)$$

avec  $X = (a_n \ a_{n-1} \ \dots \ a_{n-p} \ \dots \ a_0 \ -b)^T$   
avec  $H^{*p} = \underbrace{H * H * \dots * H}_{p \text{ fois}}$ .

Une fois mise sous cette forme, l'estimation de  $\tau_a$  consiste au calcul des valeurs propres généralisées du couple de

matrices  $(A_2, A_1)$ . En pratique les mesures  $u$  et  $y$  étant entachées d'erreurs, l'estimation de  $\tau_a$  consistera plutôt à l'étude des minima locaux des ensemble  $\Lambda_\epsilon(A_2, A_1)$ ,  $\epsilon \geq 0$ . Ainsi, à l'apparition d'un défaut actionneur de type échelon retardé sur le système, l'estimation d'un des minima devient stationnaire autour d'une valeur qui est estimée du temps d'apparition  $\tau_a$ .

Après avoir estimé le temps d'apparition du défaut actionneur  $\tau_a$ , un raisonnement similaire nous permet de déterminer l'amplitude  $l_a$ . En effet, en posant  $\alpha_2 = t^{n+1}$ , on obtient

$$\alpha_2(a_n y^{(n+1)} + \dots + a_0 y^{(1)} - bu^{(1)}) = bl_a \alpha_1 \delta_{\tau_a}$$

$\Rightarrow \forall t \geq \tau_a$  et  $m \geq n + 1$  :

$$l_a = \frac{H^{*m} * [\alpha_1(q_{n+2}y^{(n+1)} + \dots + q_2y^{(1)} + q_1u^{(1)})]}{H^{*m} * [-q_1\alpha_1\delta_{\tau_a}]}$$

où  $q = (q_{n+2}, \dots, q_1)^T$  est le plus petit vecteur singulier<sup>1</sup> de la matrice  $A_2 - \tau_a A_1$ .

Les convolutions successives  $H^{*p}$  (intégrations successives) opèrent comme un filtre passe-bas et contribuent à atténuer les perturbations hautes fréquences sur les mesures des signaux.

### 3.3 système avec défaut capteur

Nous reprenons l'étude faite dans la section précédente en considérant cette fois le système en présence non pas d'un défaut actionneur, mais d'un défaut capteur abrupt apparu à l'instant  $\tau_c$  avec une amplitude  $l_c$ . Un tel système est représenté par

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y &= \phi_0 + bu \\ + l_c(a_n \delta_{\tau_c}^{(n-1)} + \dots + a_0 H(t - \tau_c)) \end{aligned} \quad (14)$$

L'application de la dérivation à l'équation du système en défaut ci-dessus donne

$$\begin{aligned} a_n y^{(n+1)} + \dots + a_0 y^{(1)} - bu^{(1)} &= \\ \phi_0^{(1)} + l_c(a_1 \delta_{\tau_c}^{(n)} + \dots + a_0 \delta_{\tau_c}) \end{aligned} \quad (15)$$

avec

$$(1) \text{ Supp}(\phi_0^{(1)}) = \{0\} \text{ et } \text{Ordre}(\phi_0^{(1)}) = n.$$

$$(2) \text{ Supp}(\delta_{\tau_c}^{(\nu)}) = \{\tau_c\} \text{ et } \text{Ordre}(\delta_{\tau_c}^{(\nu)}) = \nu.$$

Ainsi, en posant  $\alpha_3(t) = t^{n+1}(t - \tau_c)^{n+1}$  alors (d'après le théorème (2.1))

$$\alpha_3(a_n y^{(n+1)} + \dots + a_0 y^{(1)} - bu^{(1)}) = 0 \quad (16)$$

Soient  $W_{i,j} = t^{n+i}y^{(j+1)}$  et  $V_i = t^{n+i}u^{(1)}$  pour  $i = 1, \dots, n+2$  et  $j = 0, \dots, n$ , on obtient comme précédemment la formulation spectrale suivante

$$[A_{n+1} - \lambda_n A_n - \dots - \lambda_1 A_1 - \lambda_0 A_0]X = 0 \quad (17)$$

avec  $A_i$ , pour  $i = 0, 1, \dots, n+1$  et  $X$  définis par (13) et  $\lambda_i = (-1)^{n-i} C_i^{n+1} \tau_c^{n+1-i}$ ,  $i \leq n$  le coefficient du monôme  $t^i$  dans le polynôme  $-(t - \tau_c)^{n+1}$ .

La logique de décision est similaire à celle de la sous-section précédente. L'estimation du vecteur  $\lambda$  est obtenue

<sup>1</sup> correspondant à la plus petite valeur singulière

par l'étude des ensembles  $\Lambda_\epsilon(A_{n+2}, \dots, A_0)$ ,  $\epsilon > 0$  et le temps  $\tau_c$  (en présence de défaut capteur de type échelon) est estimé à partir des composantes de  $\lambda$ , par exemple  $\tau_c = \frac{\lambda_n}{n+1}$  (c'est la meilleure estimation de  $\tau_c$  car  $\beta_n$  est le seul coefficient linéaire par rapport à  $\tau_c$ ).

Egalement on détermine l'amplitude  $l_c$  en posant  $\alpha_4 = t^{n+1}(t - \tau_c)^n$  et

$$l_c = (-1)^n \frac{H^{*m} * [\alpha_2(q_{n+2}y^{(n+1)} + \dots + q_2y^{(1)} + q_1u^{(1)})]}{n! H^{*m} * \delta_{\tau_c}}$$

$\forall t \geq \tau_c$  et  $m \geq n + 1$

où  $q = (q_{n+2}, \dots, q_1)^T$  est le plus petit vecteur singulier de la matrice  $A_{n+1} - \lambda_n A_n - \dots - \lambda_0 A_0$ .

### 3.4 système avec défaut actionneur et défaut capteur

Dans le cas de défauts multiples (actionneur et capteur), la seule application des démarches précédentes n'assure pas la détection et la localisation des défauts. En effet, le modèle du système en défaut étant

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + \dots + a_0 y &= \phi_0 + bu \\ + bl_a H(t - \tau_a) + l_c(a_n \delta_{\tau_c}^{(n-1)} + \dots + a_0 H(t - \tau_c)) \end{aligned} \quad (18)$$

la multiplication par  $\alpha_1(t) = t^{n+1}(t - \tau_a)$  ou  $\alpha_3(t) = t^{n+1}(t - \tau_c)^{n+1}$ , après dérivation, n'annule pas toutes les singularités apparues, donc ne permet pas d'obtenir la formulation spectrale du problème de diagnostic des défauts. Pour cela, on peut considérer la fonction

$$\alpha_5(t) = t^{n+1}(t - \tau_a)(t - \tau_c)^{n+1}$$

Cette fonction permet d'obtenir la formulation spectrale

$$[A_{n+2} - \beta_{n+1}A_{n+1} - \dots - \beta_1A_1 - \beta_1A_1]X = 0 \quad (19)$$

A partir de (19),  $\tau_a$  et  $\tau_c$  peuvent être déterminés à l'aide des estimations des composantes de  $\beta$ .

Le premier défaut peut être détecté comme dans les section 3.2 et 3.3. La détection du second défaut peut être effectuée par l'estimation de  $\beta_{n+1} = \tau_a + (n+1)\tau_c$  qui devient stationnaire à partir de l'instant  $t \geq \max(\tau_a, \tau_c)$ .

Notons enfin que l'amplitude du second défaut peut être estimée en fonction des estimations de  $\tau_a$  et  $\tau_c$ .

## 4. APPLICATION À UN SYSTÈME DU PREMIER ORDRE

Considérons le système du premier ordre ( $n = 1$ ) représenté par le modèle entrée/sortie  $a_1 \dot{y} + a_0 y = bu + y(0)\delta$

Ce système est commandé par un correcteur proportionnel-intégral (PI). Les défauts simulés sont des défauts actionneur et capteur de type échelon. Les signaux simulés  $u$  et  $y$  sont représentés sur la figure (2). Les figures (3) à (8) montrent les résultats graphiques des estimations obtenues avec la méthode proposée. En utilisant le fait qu'un défaut ne peut pas être détecté avant son apparition, on fixe les différentes estimées à zéro lorsque les valeurs utilisées pour leurs déterminations sont significativement faibles.

La stationnarité de l'estimée de  $\tau_a$  autour de la valeur 1 (figure 3) ainsi que de l'estimée de  $l_a$  autour de 0.8 (figure 4) dans l'intervalle de temps [1; 2] permet de conclure de l'apparition d'un défaut actionneur  $f_a(t) = 0.8H(t - 1)$ .

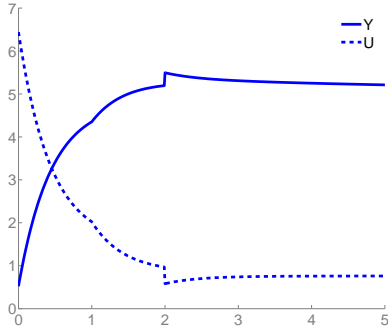


FIG. 2. Commande et sortie du système

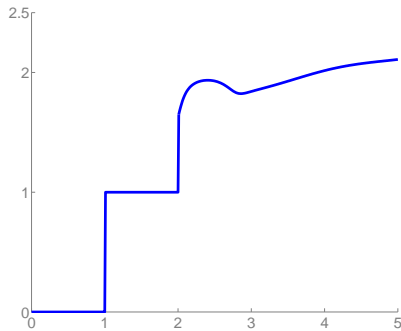


FIG. 3. estimation de  $\tau_a$

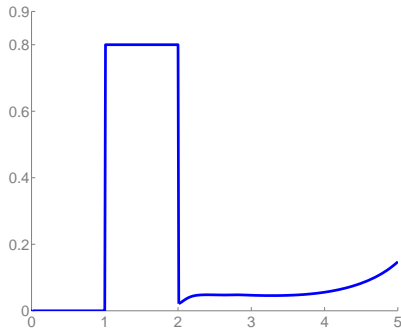


FIG. 4. estimation de  $l_a$

Les estimations de  $\tau_a$  et  $l_a$  deviennent non stationnaires pour  $t > 2$ . De plus le défaut actionneur affecte la détection du défaut capteur (ni  $\tau_c$ , ni  $l_c$  ne sont estimés). Ce dernier se manifeste au travers de la stationnarité à partir de l'instant  $t > 2$  de l'estimation de  $\beta_2 = \tau_a + 2\tau_c$  autour de la valeur 5 (figure 7). Sur la figure (8), on représente l'estimation de l'amplitude  $l_c$  obtenue en fonction de l'estimation de  $\beta_2$  et celle de  $\tau_a$ .

## 5. CONCLUSION

La méthode algébrique de diagnostic de défauts présentée dans ce papier ne requiert que la seule connaissance de la structure du système et des signaux pour être mise en œuvre. Lors de travaux futurs, la robustesse de la méthode par rapport aux bruits de mesure sera à étudier.

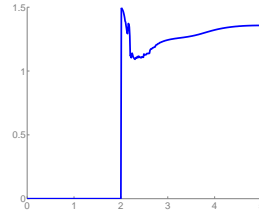


FIG. 5. estimation de  $\tau_c$

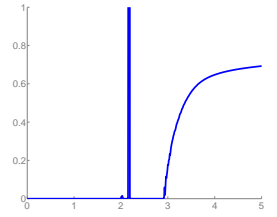


FIG. 6. estimation de  $l_c$

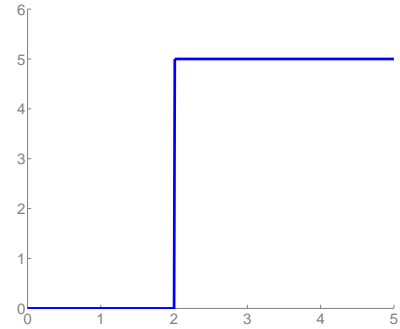


FIG. 7. estimation de  $\beta_2$

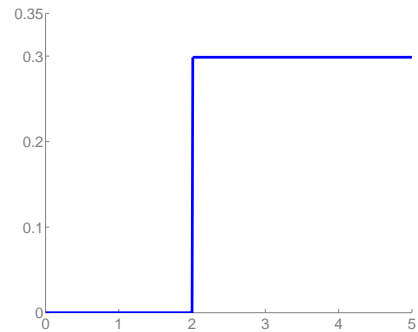


FIG. 8. estimation de  $l_c$  en fonction de  $\tau_a$  et  $\beta_2$

## RÉFÉRENCES

- L. Belkoura and J. P. Richard. A distribution framework for the fast identification of linear systems with delays. *6th IFAC Workshop on Time Delay System*, 2006.
- G. Boutry, M. Elad, G. Golub, and P. Milanfar. The generalized eigenvalue problem for non-square pencils using a minimal perturbation approach. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 27 :582–601, 2005.
- M. Fliess and H. Sira-Ramirez. An algebraic framework for linear identification. *ESAIM Control, Optimization and Calculus of Variations*, 9 :151–168, 2003.
- R. Isermann. *Fault-Diagnosis System*. Springer, Berlin, 2006.
- R. Patton, R. Clark, and P. M. Frank. *Issues of Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Springer-Verlag, London, 2000.
- L. Schwartz. *Théorie des distributions*. Hermann, Paris, 2nd edition, 1966.
- T. G. Wright and L. N. Trefethen. Pseudospectra of rectangular matrices. *IMA J. of Numer. Anal.*, 22 : 501–519, 2002.